Beweis: vgl. Satz 1

Lokale Konformität von regulären Flächen ist offenbar eine Äquivalenzrelation, tatsächlich gilt:

THEOREM: Je zwei reguläre Flächen sind lokal konform äquivalent.

Insbesondere ist jede reguläre Fläche lokal konform äquivalent zur Ebene $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Sind also S_1, S_2 reguläre Flächen, $p \in S_1$, $q \in S_2$ beliebig, so gibt es Umgebungen U von p, V von q in $\mathbb{R}^3$ sowie eine konforme Abbildung $\varphi : U \cap S_1 \longrightarrow V \cap S_2$ mit $q = \varphi(p)$. Den Beweis findet man im Buch von

L. Bers, Riemann Surfaces, p. 15 - p. 35.

Die Idee besteht darin, lokale Parametrisierungen $X : \mathbb{R}^2 \supset U \to S$ zu konstruieren mit

$$(*) \quad \mathcal{E} = \lambda^2 = \mathcal{G}, \quad \mathcal{F} \equiv 0 \quad \text{auf } \mathcal{U}$$

mit einer glatten Funktion $\lambda^2 > 0$ auf $\mathcal{U}$. Für den Sonderfall zweier Minimalflächen kann man das Theorem mit weniger Aufwand beweisen. Im übrigen besagt $(*)$ in unserer früheren Nomenklatur, dass man jede Fläche isotherm ($\mathcal{E} = \mathcal{G}, \mathcal{F} = 0$) parametrisieren kann.

Beispiel 1: Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ offen, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) := (u(x,y), v(x,y))$ sei holomorph. Dann erfüllen u, v die Cauchy-Riemann Gleichungen $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$, und mit $N := \{(x,y) \in \mathcal{U} : u_x^2 + u_y^2 = 0\}$ ist

$$f : \mathcal{U} \setminus N \to \mathbb{R}^2$$

lokal konform, denn es gilt:

$$|f_x|^2 = |(u_x, v_x)|^2 = u_x^2 + v_x^2 = u_x^2 + u_y^2 =: \lambda^2 > 0;$$

$$|f_y|^2 = |(u_y, v_y)|^2 = u_y^2 + v_y^2 = u_y^2 + u_x^2 = \lambda^2,$$

$$\varphi_x \cdot \varphi_y = (u_x, v_x) \cdot (u_y, v_y) = u_x u_y + v_x v_y =$$

$$u_x u_y - u_y u_x \equiv 0.$$

<u>In diesem Sinn induzieren holomorphe Funktionen lokal konforme Abbildungen.</u>

<u>Beispiel 2:</u> Wir betrachten die folgende Parametrisierung der Einheitssphäre S^2: $X: U \to S^2$; $X(\Theta, \varphi) :=$ $(\sin\Theta \cos\varphi, \sin\Theta \sin\varphi, \cos\Theta)$; $U := (0,\pi) \times (0, 2\pi)$.

Dann parametrisiert man um: $u = \varphi$, $v := \ln\tan(\Theta/2)$.

Es folgt:

$$Y(u,v) = X(\Theta(v), \varphi(u)) = \left(\frac{1}{\cosh v}\cos u, \frac{1}{\cosh v}\sin u, -\tanh v\right).$$

(z.B.: $v := \ln\tan\left(\frac{\Theta}{2}\right) \Longrightarrow \Theta = 2\arctan(e^v)$;

dann: $\cos\Theta = \cos(2\arctan e^v) =$

$$\cos^2(\arctan e^v) - \sin^2(\arctan e^v) =$$

$$\frac{1}{1+\tan^2}(\arctan e^v) - \frac{\tan^2}{1+\tan^2}(\arctan e^v) =$$

$$\frac{1}{1+e^{2v}} - \frac{e^{2v}}{1+e^{2v}} = \frac{1-e^{2v}}{1+e^{2v}} = -\frac{e^{v}-e^{-v}}{e^{v}+e^{-v}} = -\tanh v,$$

usw. Es folgt $Y(u,v) = \ldots$)

Für die Koeffizienten der Ersten Fundamentalform bekommt man in dieser Darstellung:

$$\mathcal{E} = \mathcal{G} = (\cosh v)^{-2}, \quad \mathcal{F} \equiv 0.$$

Mithin ist

$$Y^{-1} : S^2 \supset X(\mathcal{U}) \longrightarrow \text{Bild}\, Y^{-1} \subset \mathbb{R}^2$$

eine <u>konforme Abbildung</u>, genannt <u>Mercator-Projektion</u>. Mercator hat diese Form einer Weltkarte 1569 veröffentlicht. Hier werden die Meridiane $\varphi = \text{const}$ und die Breitenkreise $\vartheta = \text{const}$ auf zueinander senkrechte Geraden abgebildet.

§3 Das Theorema Egregium von Gauß (1827)

wurde von Gauß selbst als „herausragender" Satz bezeichnet. Die Aussage gehört zu den wichtigsten Sätzen der Differentialgeometrie, sie lautet:

Theorem: Die Gauß'sche Krümmung einer regulären Fläche ist invariant unter lokalen Isometrien.

Bemerkung: 1.) Für die mittlere Krümmung H gilt das nicht, man betrachte etwa den Zylinder und die Ebene.

2.) Der Beweis des Satzes beruht auf der Beobachtung, dass man die Gauß-Krümmung K schreiben kann in Termen der Koeffizienten der Ersten Fundamentalform und Ableitungen dieser Koeffizienten. Unter einer lokalen Isometrie stimmen aber die Koeffizienten von I an den entsprechenden Stellen überein.

3.) Da das Katenoid lokal isometrisch zum Helikoid ist, folgt aus dem Theorem die Gleichheit der Gauß-Krümmung an den entsprechenden Stellen. Das sieht man den Flächen nicht sofort an!

Wir präzisieren Bemerkung 2) und leiten die <u>partiellen Differentialgleichungen der Flächentheorie ab</u>: Sei $X: \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche mit dem begleitenden 3Bein X_u, X_v, N. Es gelten die Gleichungen (jeder Vektor links ist Linearkombination des 3 Beins)

$$
(1)\quad \begin{cases}
X_{uu} = \Gamma^1_{11} X_u + \Gamma^2_{11} X_v + b_{11} N, \quad b_{11} = \mathcal{L}, \\[1ex]
\left.\begin{aligned} X_{uv} &= \Gamma^1_{12} X_u + \Gamma^2_{12} X_v + b_{12} N, \\ X_{vu} &= \Gamma^1_{21} X_u + \Gamma^2_{21} X_v + b_{12} N \end{aligned}\right\}, \; b_{12} = b_{21} = \mathcal{M}, \\[1ex]
X_{vv} = \Gamma^1_{22} X_u + \Gamma^2_{22} X_v + b_{22} N, \quad b_{22} = \mathcal{N},
\end{cases}
$$

wobei wir die bekannten Definitionen der Koeffizienten aus II benutzt haben, etwa $\mathcal{L} := -N_u \cdot X_u = N \cdot X_{uu}$.

Außerdem haben wir noch die Weingarten - Gleichungen

$$(2)\quad \begin{cases} N_u = -b_1^1 X_u - b_1^2 X_v, \\ N_v = -b_2^1 X_u - b_2^2 X_v. \end{cases}$$

Wir benennen die Variablen um durch $(u,v) \leftrightarrow (u_1,u_2)$

und können (1), (2) <u>mit Summationskonvention</u> ersetzen durch

$$\boxed{\begin{aligned} (1)'\quad X_{u_\alpha u_\beta} &= \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} X_{u_\gamma} + b_{\alpha\beta} N, \\ (2)'\quad N_{u_\alpha} &= -b^\beta_\alpha X_{u_\beta}; \end{aligned}}$$

wobei (zur Erinnerung)

$$b^\beta_\alpha := b_{\alpha\gamma}\, g^{\gamma\beta},$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ 1^{\text{te}}\ \text{Fundamentalform}}}{G = (g_{\alpha\beta})}, \quad G^{-1} = (g^{\alpha\beta}), \quad \underset{\substack{\uparrow \\ 2^{\text{te}}\ \text{Fundamentalform}}}{B = (b_{\alpha\beta})}$$

Man nennt

$$\boxed{\begin{aligned} &\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \quad \text{Christoffel - Symbole } 2^{\text{ter}} \text{ Art}, \\ (3)\quad &\Gamma_{\alpha\beta\gamma} := g_{\beta\sigma}\, \Gamma^\sigma_{\alpha\gamma} \quad \text{Christoffel - Symbole } 1^{\text{ter}} \text{ Art}. \end{aligned}}$$

Man nennt (1) bzw. (1)' die Darstellungsformeln von Gauß für die zweiten Ableitungen. Wir wollen die Christoffel-Symbole ausrechnen:

Es ist

$$(4)\quad X_{u_\alpha u_\beta}\cdot X_{u_\gamma} = \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}\,\underbrace{X_{u_\sigma}\cdot X_{u_\gamma}}_{=g_{\sigma\gamma}=g_{\gamma\sigma}} = g_{\gamma\sigma}\,\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\gamma\beta} \Longrightarrow$$

Symmetrie (5) $\Gamma_{\alpha\gamma\beta} = \Gamma_{\beta\gamma\alpha}$.

Außerdem gilt ersichtlich die

Symmetrie (6) $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha}$.

Andererseits ist

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} g_{\alpha\beta,\gamma} &:= \frac{\partial}{\partial u_\gamma} g_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial u_\gamma}\left(X_{u_\alpha}\cdot X_{u_\beta}\right) = \\ X_{u_\alpha u_\gamma}\cdot X_{u_\beta} &+ X_{u_\beta u_\gamma}\cdot X_{u_\alpha} \underset{(4)}{=} \Gamma_{\alpha\beta\gamma} + \Gamma_{\beta\alpha\gamma} \underset{(3)}{=} \\ g_{\beta\tau}\,\Gamma^{\tau}_{\alpha\gamma} &+ g_{\alpha\tau}\,\Gamma^{\tau}_{\beta\gamma}, \end{aligned}\right.$$

und (5) - (7) ergeben

$$- g_{\alpha\beta,\gamma} + g_{\alpha\gamma,\beta} + g_{\beta\gamma,\alpha} =$$

$$- g_{\beta\tau} \Gamma^{\tau}_{\alpha\gamma} - g_{\alpha\tau} \Gamma^{\tau}_{\beta\gamma}$$

$$+ g_{\gamma\tau} \Gamma^{\tau}_{\alpha\beta} + g_{\alpha\tau} \Gamma^{\tau}_{\gamma\beta}$$

$$+ g_{\gamma\tau} \Gamma^{\tau}_{\beta\alpha} + g_{\beta\tau} \Gamma^{\tau}_{\gamma\alpha} = 2\, g_{\gamma\tau} \Gamma^{\tau}_{\alpha\beta} \implies$$

$$- g_{\alpha\beta,\gamma} + g_{\alpha\gamma,\beta} + g_{\beta\gamma,\alpha} = 2\, \Gamma_{\alpha\gamma\beta} \implies$$

$$(8) \qquad \boxed{\Gamma_{\alpha\gamma\beta} = \frac{1}{2} \left\{ g_{\alpha\gamma,\beta} + g_{\beta\gamma,\alpha} - g_{\alpha\beta,\gamma} \right\}} \; .$$

Die Gleichung (8) sagt, dass sich die Christoffel-Symbole 1ter Art allein durch 1te Ableitungen der Ersten Fundamentalform beschreiben lassen. Gemäß (3) (Auflösen nach $\Gamma^{\sigma}_{\alpha\gamma}$) gilt dies dann auch für die Christoffel-Symbole 2ter Art.

<u>Insbesondere sind alle geometrischen Größen, die durch die Christoffel-Symbole beschrieben werden, isometrie-invariant.</u>

Ziel ist der Nachweis, dass die Gauß-Krümmung eine solche Größe ist. Dazu gehen wir zurück zu den Gauß-Gleichungen

(1)' $X_{u_\alpha u_\beta} = \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} X_{u_\gamma} + b_{\alpha\beta} N$

und differenzieren diese, wobei jetzt und nachfolgend

$X_{,\beta\gamma}$ für $X_{u_\beta u_\gamma}$, etc., geschrieben wird. Damit liest sich (1)' als

(1)' $X_{,\beta\gamma} = \Gamma^{\delta}_{\beta\gamma} X_{,\delta} + b_{\beta\gamma} N$,

und es folgt als Gleichung für die 3ten partiellen Ableitungen:

$$X_{,\beta\gamma\alpha} = \Gamma^{\tau}_{\beta\gamma,\alpha} X_{,\tau} + \Gamma^{\tau}_{\beta\gamma} X_{,\tau\alpha}$$

$$+ b_{\beta\gamma,\alpha} N + b_{\beta\gamma} N_{,\alpha} \underset{(1)',(2)'}{=}$$

$$\Gamma^{\tau}_{\beta\gamma,\alpha} X_{,\tau} + \Gamma^{\tau}_{\beta\gamma}\left[\Gamma^{\delta}_{\tau\alpha} X_{,\delta} + b_{\tau\alpha} N\right] + b_{\beta\gamma,\alpha} N +$$

$$b_{\beta\gamma}(-b^{\tau}_{\alpha}) X_{,\tau} =$$

$$\left[\Gamma^{\tau}_{\beta\gamma,\alpha} + \Gamma^{\tau}_{\delta\alpha}\Gamma^{\delta}_{\beta\gamma} - b_{\beta\gamma} b^{\tau}_{\alpha}\right] X_{,\tau} +$$

$[\Gamma^{\tau}_{\beta\gamma} b_{\tau\alpha} + b_{\beta\gamma,\alpha}] N$. Die dritten Ableitungen sind offenbar symmetrisch, d.h.

$$X_{,\alpha\beta\gamma} = X_{,\beta\alpha\gamma} = X_{,\alpha\gamma\beta} \; \ldots\ldots ,$$

speziell $X_{,\beta\gamma\alpha} - X_{,\alpha\gamma\beta} = 0$. Dann ist (der Koeff. vor $X_{,\tau}$ verschwindet)

$$\Gamma^{\tau}_{\beta\gamma,\alpha} + \Gamma^{\tau}_{\delta\alpha} \Gamma^{\delta}_{\beta\gamma} - b_{\beta\gamma} b^{\tau}_{\alpha} =$$

$$\Gamma^{\tau}_{\alpha\gamma,\beta} + \Gamma^{\tau}_{\delta\beta} \Gamma^{\delta}_{\alpha\gamma} - b_{\alpha\gamma} b^{\tau}_{\beta} \quad \Longrightarrow$$

$$\text{(9)} \quad \boxed{\begin{aligned} R^{\tau}_{\alpha\beta\gamma} &:= \Gamma^{\tau}_{\beta\gamma,\alpha} - \Gamma^{\tau}_{\alpha\gamma,\beta} + \Gamma^{\tau}_{\delta\alpha} \Gamma^{\delta}_{\beta\gamma} - \Gamma^{\tau}_{\delta\beta} \Gamma^{\delta}_{\alpha\gamma} \\ &= b_{\beta\gamma} b^{\tau}_{\alpha} - b_{\alpha\gamma} b^{\tau}_{\beta} \end{aligned}}$$

$$\Big(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Def. von } b^{\tau}_{\alpha}!}}{=} g^{\sigma\tau} (b_{\beta\gamma} b_{\alpha\sigma} - b_{\alpha\gamma} b_{\beta\sigma}) \Big) .$$

Analog zu (9) erhält man aus $X_{,\beta\gamma\alpha} - X_{,\alpha\gamma\beta} = 0$, dass in der Differenz der Koeffizient vor N verschwindet, also: